

密閉容器内の自然対流

熱による膨張・収縮を伴う密閉容器内における空気の自然対流を考える．空気は理想気体の状態方程式に従うとし，密閉容器の鉛直壁およびその対向壁が加熱・冷却され，その他の壁は断熱される場合を想定する．支配方程式は，質量，運動量，およびエネルギーの保存則で，それぞれ以下のように表されるものとする．

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \quad (1)$$

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \mu \left\{ \nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{3} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \right\} - \rho g \vec{e}_z \quad (2)$$

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = -p \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \lambda \nabla^2 T + \Phi \quad (3)$$

ただし，ここでは，粘性係数，熱伝導率，比熱は，温度や圧力などに依存せず，一定値とみなす． \vec{e}_z は重力方向上向きの単位ベクトルを表す．また，エネルギー方程式の右辺3項は散逸関数を表し，3次元デカルト座標系においては次式のように表される．

$$\begin{aligned} \Phi = 2\mu & \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \\ & + \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (4)$$

状態方程式は次式で与えられる．

$$\rho = \frac{p}{RT} \quad (5)$$

一般性を持たせるために，例えば，加熱面が強制的に時間的な温度変動を受ける密閉容器内の自然対流を想定する．密閉容器内の瞬間的な空間平均温度は変化するが，それでも質量保存則から，密度の空間平均値は変化しない．このとき，式(5)の状態方程式は，

$$\rho_{ave} = \frac{p_{th}}{RT_{th}} = \text{const.} \quad (6)$$

と書ける．ここで， ρ_{ave} は平均密度であり一定値である． p_{th} ， T_{th} はそれぞれ熱力学的な圧力，温度であり，容器内の何処でも同じで時間のみに依存するものと仮定する．式(6)の関係式から，加熱面の温度が上がれば，それに比例して圧力も上がることが理解できる．対流が発生している状態での密度，温度，圧力を次のように置く．

$$\rho = \rho_{ave} + \rho_d(\vec{x}, t), \quad T = T_{th}(t) + T_d(\vec{x}, t), \quad p = p_{th}(t) + p_{ss}(\vec{x}) + p_d(\vec{x}, t) \quad (7)$$

ここで， $p_{ss}(\vec{x})$ は，密閉容器内に対流が無い状態における静的な圧力分布を表すものとする

る。式(7)をそれぞれの支配方程式に代入し、結果として以下を得る。ただし、粘性散逸項は、自然対流においては十分にその寄与は小さく、以下では無視する。

<質量保存式>

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = -\frac{1}{(\rho_{ave} + \rho_d)} \left(\frac{\partial \rho_d}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \rho_d \right) \quad (8)$$

<運動方程式>

$$(\rho_{ave} + \rho_d) \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla} p_d + \mu \left[\nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{3} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \right] - \rho_d g \vec{e}_z \quad (9)$$

<エネルギー方程式>

$$(\rho_{ave} + \rho_d) c_v \left[\frac{dT_{th}}{dt} + \frac{\partial T_d}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T_d \right] = -p_{th} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \lambda \nabla^2 T_d \quad (10)$$

<状態方程式からの変動>

$$\frac{p_d}{p_{th}} = \frac{\rho_d}{\rho_{ave}} + \frac{T_d}{T_{th}} \quad (11)$$

まとめられた以下の式に対して、無次元化を行う。

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho_d}{Dt} \quad (12)$$

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla} p_d + \mu \left[\nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{3} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \right] - \rho_d g \vec{e}_z \quad (13)$$

$$\frac{DT_d}{Dt} = -\frac{dT_{th}}{dt} - \frac{1}{\rho c_v} p_{th} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \frac{\lambda}{\rho c_v} \nabla^2 T_d \quad (14)$$

$$\rho_d = \rho_{ave} \left(\frac{p_d}{p_{th}} - \frac{T_d}{T_{th}} \right) \quad (15)$$

$$p_{th} = \rho_{ave} R T_{th} \quad (16)$$

<無次元式のまとめ>

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{D\bar{\rho}_d}{D\tau} \quad (17)$$

$$\bar{\rho} \frac{D\vec{U}}{D\tau} = -\frac{1}{\gamma M^2 \Theta_{TH}} \vec{\nabla} P + Pr \left[\nabla^2 \vec{U} + \frac{1}{3} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) \right] - \bar{\rho}_d G Pr^2 \vec{e}_z \quad (18)$$

$$\frac{D\Theta}{D\tau} = -\frac{d\Theta_{TH}}{d\tau} - \frac{1}{\bar{\rho}} (\gamma - 1) \Theta_{TH} \vec{\nabla} \cdot \vec{U} + \frac{\gamma}{\bar{\rho}} \nabla^2 \Theta \quad (19)$$

$$\bar{\rho} = 1 + \bar{\rho}_d = 1 + \frac{P - \Theta}{\Theta_{TH}}, \quad P_{TH} = \Theta_{TH} \quad (20)$$

無次元の変数と無次元数は以下のとおり定義される。

$$\begin{aligned}
\bar{X} &= \frac{\bar{x}}{l}, \quad \tau = \frac{t}{\rho_{ave} l^2 c_p / \lambda}, \quad \Theta_{TH} = \frac{T_{th}}{\Delta T} = \frac{1}{\beta \Delta T}, \quad P_{TH} = \frac{p_{th}}{\rho_{ave} R \Delta T}, \quad \bar{\rho}_d = \frac{\rho_d}{\rho_{ave}}, \\
\bar{U} &= \frac{\bar{u}}{\lambda / (\rho_{ave} c_p l)}, \quad \Theta = \frac{T_d}{\Delta T}, \quad P = \frac{p_d}{\rho_{ave} R \Delta T}, \quad \Delta T = T_h - T_c, \quad c_s = \sqrt{\gamma R T_{th}}, \\
M &= \frac{\lambda}{c_s \rho_{ave} c_p l}, \quad G = \frac{\rho_{ave}^2 g l^3}{\mu^2}, \quad Pr = \frac{c_p \mu}{\lambda}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}
\end{aligned} \tag{21}$$

特に、式(18)の右辺第一項の圧力項の係数からわかるように、無次元の変動圧力 P のオーダーは、無次元の変動温度 Θ のそれよりもずっと小さくなるために、式(20)における P は無視できる。このとき、運動方程式においてのみ圧力 P が現れ、他項からの制約が無くなる。また体膨張係数 β

$$\beta \equiv -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = -\frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{p}{RT} \right) \right\}_p = -\frac{1}{\rho} \left(-\frac{p}{RT^2} \right) = \frac{1}{T} \tag{22}$$

を用いれば、温度 T_{th} が時間的に一定のときには、式(20)の無次元密度を $\bar{\rho} = 1 - (\beta \Delta T) \Theta$ として、以下のように表すことができる。

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{U} = \frac{\beta \Delta T}{\bar{\rho}} \frac{D\Theta}{D\tau} \tag{23}$$

$$\bar{\rho} \frac{D\bar{U}}{D\tau} = -\bar{\nabla} \cdot \underbrace{\left(\frac{\beta \Delta T}{\gamma M^2} P \right)}_{P'} + Pr \left[\nabla^2 \bar{U} + \frac{1}{3} \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{U}) \right] + G (\beta \Delta T) Pr^2 \Theta \cdot \bar{e}_z \tag{24}$$

$$\bar{\rho} \frac{D\Theta}{D\tau} = -\frac{\gamma - 1}{\beta \Delta T} \bar{\nabla} \cdot \bar{U} + \gamma \nabla^2 \Theta \tag{25}$$

ここで、式(24)における圧力項は、以下の式変形からわかるように、非圧縮流れでよく用いられる無次元圧力 P' を表す。

$$\begin{aligned}
\frac{\beta \Delta T}{\gamma M^2} P &= \frac{\beta \Delta T}{\gamma M^2} \frac{p_d}{\rho_{ave} R \Delta T} = \frac{\beta}{\gamma M^2} \frac{p_d}{\rho_{ave} R} = \frac{\beta c_s^2 \rho_{ave}^2 c_p^2 l^2}{\gamma \lambda^2} \frac{p_d}{\rho_{ave} R} \\
&= \frac{\beta \gamma R T_{th} \rho_{ave}^2 c_p^2 l^2}{\gamma \lambda^2} \frac{p_d}{\rho_{ave} R} = \frac{\rho_{ave}^2 c_p^2 l^2}{\lambda^2} \frac{p_d}{\rho_{ave}} = \frac{l^2}{\alpha^2} \frac{p_d}{\rho_{ave}} = \frac{p_d}{\rho_{ave} \alpha^2 / l^2} = P'
\end{aligned} \tag{26}$$

式(23)から(25)に対して、さらに変形すると、以下のようにも書き直すことができる。

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{U} = \gamma \frac{\beta \Delta T}{\bar{\rho}^2 + \gamma - 1} \nabla^2 \Theta \tag{27}$$

$$\frac{D\bar{U}}{D\tau} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \bar{\nabla} P' + \frac{Pr}{\bar{\rho}} \left[\nabla^2 \bar{U} + \frac{1}{3} \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{U}) \right] + \frac{Gr Pr^2}{\bar{\rho}} \Theta \cdot \bar{e}_z \tag{28}$$

$$\frac{D\Theta}{D\tau} = \frac{\gamma\bar{\rho}^2}{\bar{\rho}^2 + \gamma - 1} \nabla^2 \Theta \quad (29)$$

特に、無次元密度を 1 とするような近似を施すと、

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = (\beta\Delta T) \nabla^2 \Theta \quad (30)$$

$$\frac{D\vec{U}}{D\tau} = -\vec{\nabla} P' + Pr \left[\nabla^2 \vec{U} + \frac{1}{3} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) \right] + Gr Pr^2 \Theta \cdot \vec{e}_z \quad (31)$$

$$\frac{D\Theta}{D\tau} = \nabla^2 \Theta \quad (32)$$

と簡単になる。ここで、さらに速度の発散をゼロ ($\beta\Delta T$ の値をゼロに近づける) とすると、いわゆる Boussinesq 近似により得られる方程式系と同じになることがわかる。このとき、熱拡散率 $\alpha = \lambda / (\rho_{ave} c_p)$ を用いて、無次元変数と無次元数は整理されて、以下のようなになる。

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \frac{\bar{x}}{l}, \quad \tau = \frac{t}{l^2/\alpha}, \quad \vec{U} = \frac{\vec{u}}{\alpha/l}, \quad \Theta = \frac{T - T_{th}}{T_h - T_c}, \quad P' = \frac{p_d}{\rho_{ave} \alpha^2 / l^2}, \\ Gr &= G(\beta\Delta T) = \frac{g\beta(T_h - T_c)l^3}{(\mu/\rho_{ave})^2}, \quad Pr = \frac{c_p \mu}{\lambda} \end{aligned} \quad (33)$$

数値計算結果

正方形の密閉容器の対向する鉛直壁がそれぞれ一定温度で加熱・冷却され、水平壁が断熱される場合における空気の熱対流を対象とする。計算領域は、 128×128 の等間隔スタガード格子に分割され、HSMAC法を用いた数値計算を実行し、定常解が得られた。式(17)-(20)に基づいて得られた数値計算の可視化結果を図1に示す。この結果は、式(23)-(25)に基づく計算結果と比べて、無次元圧力の絶対値が変わるだけで流れの性質は全く変わらない。つまり M の値が小さい計算では、圧力場が密度変化に与える影響は無視できることがわかる。各図の等高線分布を眺めると、Boussinesq 近似で得られる点対称な場は得られず、 $\beta\Delta T$ がゼロではないため、若干の対称性の破れが見て取れる。

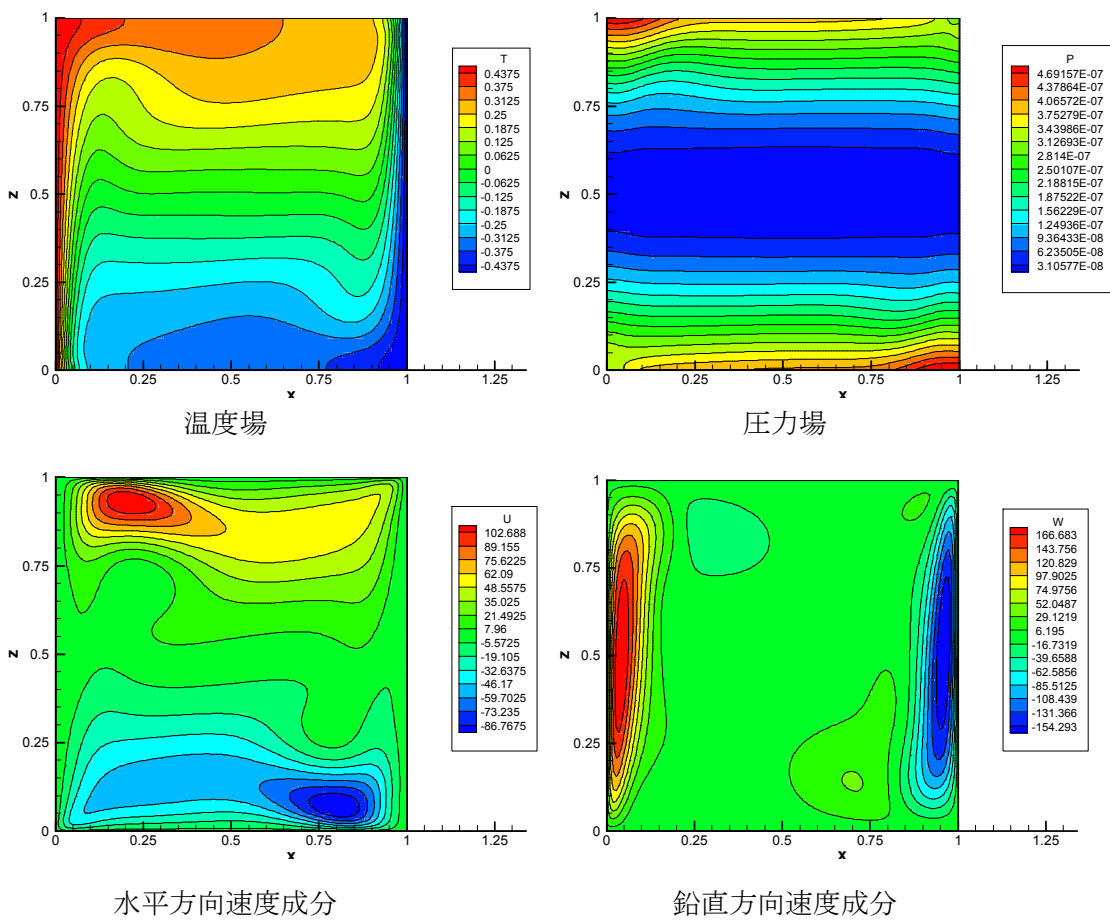


図1 可視化結果 ($Gr = 10^6$, $Pr = 0.7$, $\beta\Delta T = 0.3$, $\gamma = 1.4$, $M = 1.3 \times 10^{-6}$)